Hertentamen Functionaalanalyse, 2008–2009

Datum : 24-08-2009, 14.00–17.00 uur.

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Laat X de lineaire ruimte van begrensde reële functies op $\mathbb{R}$ met norm gedefinieerd door

   $$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

   (a) Toon aan dat $\|\cdot\|$ een norm op X definieert.

   (b) Beschouw de operator $T : X \to X$ gedefiniëerd door

   $$(Tx)(t) = x(t - \Delta)$$

   voor een zekere positieve $\Delta \in \mathbb{R}$. (Dit wordt een tijdsvertragingsoperator genoemd.) Toon aan dat T een begrensde lineaire operator is. Wat is de norm van T ?

   (c) Wat zijn de eigenwaarden van T, en wat is het spectrum van T ?

2. Laat X de ruimte van rijtjes $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ waarin slechts een eindig aantal (afhankelijk van de rij) van de elementen niet nul is. Definieer voor $x \in X$

   $$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

   (a) Laat zien dat X een lineaire ruimte is.

   (b) Bewijs dat $\|\cdot\|$ een norm op X definieert.

   (c) Is deze norm afkomstig van een inprodukt op X ?

   (d) Toon aan dat de rij met n-de element $(1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, \dots)$ een Cauchy-rij in X met deze norm is.

   (e) Laat zien dat X niet volledig is.

3. De *geadjungeerde* S^* van een lineaire operator $S : H \to H$, met H een Hilbert ruimte met inprodukt $<,>$, wordt gedefinieerd door te eisen dat S^* voldoet aan

   $$< Sx, y > = < x, S^*y >$$

   voor alle $x, y \in H$.

   (a) Toon aan dat de geadjungeerde van een begrensde lineaire operator weer een begrensde lineaire operator is.

Beschouw nu de operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ gedefinieerd door

$$Tf(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt$$

met $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een continue functie.

(b) Toon aan dat de geadjungeerde operator T^* gegeven wordt door

$$T^*f(x) = \int_x^1 k(t,x)f(t)dt$$

(c) Schrijf de som operator $T+T^*$ als een Fredholm operator van de eerste soort. Laat zien dat als k een constante functie is dat dan $T+T^*$ een 1-dimensionale operator is. Is $T+T^*$ dan een compacte operator ?

(d) Een operator $S : H \to H$ is zelfgeadjungeerd indien $S^* = S$. Laat $S_n : H \to H$ een rij van zelfgeadjungeerde operatoren op een Hilbertruimte H. Neem aan dat de rij $\{S_n\}$ convergeert naar een operator $S : H \to H$, dus voor $n \to \infty$

$$\|S_n - S\| \to 0$$

Toon aan dat S ook weer zelfgeadjungeerd is.

(e) Toon aan dat $S = T + T^*$ uit onderdeel (c) voor algemene k zelfgeadjungeerd is.

Puntenverdeling:

1. a: 5, b: 10, c: 10.
2. a: 5, b: 5, c: 10, d: 5, e: 5.
3. a: 10, b: 7, c: 8, d: 7, e: 3.

Gratis: 10, Totaal: 100

2